6. Criptografia de clau pública

En aquest capítol ens introduirem en el món de la criptografia de clau pública. En primer lloc, descriurem el concepte de criptografia de clau pública o asimètrica, així com les característiques més destacades d'aquest tipus d'algorismes. Seguidament, veurem dos dels algorismes de xifrat de clau pública més utilitzats avui en dia: l'RSA i l'ElGamal.

Seguidament presentarem el concepte de signatura digital i descriurem tres dels algorismes més populars de signatura digital: l'esquema de signatura RSA, el d'ElGamal, i el DSA.

A continuació, compararem els algorismes de clau pública presentats amb els algorismes de criptografia simètrica que havíem vist en capítols anteriors, destacant-ne les seves fortaleses i debilitats.

Després, descriurem alguns detalls a tenir en compte a l'hora d'implementar els algorismes de clau pública descrits.

Finalment, presentarem una pinzellada d'altres famílies de criptografia de clau pública que, a diferència de les presentades amb detall en aquest capítol, no estan basades en els problemes de factorització d'enters i càlcul del logaritme discret.

6.1 L'origen de la criptografia de clau pública

La criptografia de clau simètrica es caracteritza per fer servir una mateixa clau tant per xifrar com per a desxifrar. És a dir, en criptografia simètrica, tant l'emissor d'un missatge (que el xifrarà abans d'enviar-lo), com el receptor (que l'haurà de desxifrar per poder-lo interpretar), comparteixen una única clau.

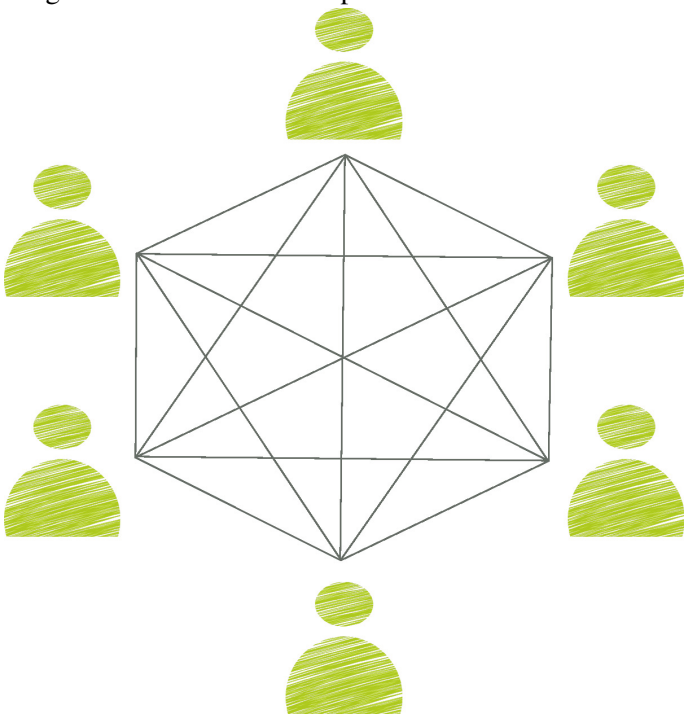
La criptografia de clau simètrica presenta algunes limitacions:

1. La **distribució de claus** s'ha de realitzar sobre un canal segur. Com que els dos usuaris comparteixen la mateixa clau i aquesta clau pot ser utilitzada directament per xifrar i desxifrar missatges, la clau no pot ser transmesa per un canal insegur, ja que aleshores un atacant que estigués escoltant el canal podria capturar-la i utilitzar-la. Per tant, per aconseguir que dos usuaris, l'Alice i en Bob, aconsegueixin tenir una clau simètrica amb què comunicar-se, caldrà que aquests dos usuaris hagin tingut un canal segur amb què transmetre-la amb anterioritat. Per exemple, caldrà que l'Alice i en

Bob s'hagin trobat presencialment o bé que ja disposin d'un canal segur per on transmetre la clau.

2. La **gestió de claus** es complica quan el número d'usuaris creix. Si hi ha n usuaris i cada parell d'usuaris necessita compartir una clau, caldrà gestionar $n(n-1)/2$ claus, és a dir, el número de claus d'un sistema creix quadràticament amb el número d'usuaris d'aquest. Així doncs, apareixen problemes d'escalabilitat a l'hora de gestionar totes aquestes claus. La Figura 6.1 mostra un exemple de 6 usuaris que comparteixen claus 2 a 2, necessitant per tant l'existència de 15 claus.

Figura 6.1: Sis usuaris comparteixen 15 claus diferents.



3. No es disposa de la propietat de **no-repudi**. Diem que un criptosistema ofereix la propietat de no-repudi si l'autor d'un missatge no en podrà negar posteriorment l'autoria. En criptografia simètrica, com que més d'un usuari comparteixen una mateixa clau, no es pot garantir que un usuari en concret ha realitzat una acció donada, ja que sempre hi haurà algun altre usuari que podria haver-la realitzat.

La criptografia de clau pública o asimètrica permet superar aquestes limitacions. D'una banda, la criptografia de clau pública proporciona mètodes d'establiment de clau, és a dir, mètodes per aconseguir que dos usuaris que es comuniquen per un canal insegur puguin crear claus que els permetin comunicar-se de manera segura. D'altra banda, la criptografia de clau pública permet que un conjunt d'usuaris es comuniquin dos a dos de manera segura fent servir únicament un parell de claus per cada usuari. Així, el nombre de claus d'un sistema de clau pública creix linealment amb el número d'usuaris d'aquest sistema (en contraposició al creixement quadràtic que presenten els esquemes de criptografia simètrica). Finalment, a través de les signatures digitals, la criptografia de clau pública ens ofereix la propietat de no-repudi.

L'origen de la criptografia de clau pública és una mica discutit. L'article *New directions in cryptography* (1979), de Whitfield Diffie i Martin Hellman, va donar a conèixer la criptografia de clau pública a la comunitat científica i va suposar l'inici d'un canvi de paradigma en la seguretat de la informació. Posteriorment però, amb la desclassificació de documents confidencials del govern Britànic l'any 1997, es va saber que James Ellis, Clifford Cocks i Graham Williamson havien descobert el principi de clau pública uns anys abans que Diffie i Hellman, però que el descobriment no s'havia fet públic ja que era confidencial. Tot i això, es creu que els criptògrafs del govern britànic no eren conscients en aquell moment del potencial del que havien descobert.

6.2 Intercanvi de claus de Diffie-Hellman

L'algorisme d'intercanvi de claus de Diffie-Hellman (DHKE, de l'anglès, *Diffie-Hellman Key Exchange*) és un algorisme d'intercanvi de claus basat en el problema del logaritme discret. L'algorisme va ser proposat per Whitfield Diffie i Martin Hellman al 1976 i està inspirat en la feina de Ralph Merkle. Va ser el primer algorisme de criptografia asimètrica.

L'ús del DHKE

L'algorisme d'intercanvi de claus de Diffie-Hellman es fa servir actualment a Internet en els protocols TLS, SSH o IPSec.

L'algorisme d'intercanvi de claus de Diffie-Hellman permet que dos usuaris que es comuniquen per un canal insegur puguin aconseguir derivar una clau compartida de manera segura. D'aquesta manera, encara que un atacant estigui escoltant el canal, l'atacant no pot aconseguir conèixer la clau derivada pels usuaris. Tot i així, l'esquema no és segur davant d'atacants que puguin modificar la informació que viatja pel canal.

L'algorisme requereix d'un procés d'inicialització on es trien dos valors, p i α, que es fan públics:

L'algorisme d'intercanvi de claus de Diffie-Hellman entre dos usuaris, A i B, consta dels següents passos:

1. Es tria un nombre primer aleatori p i un enter $\alpha \in [2,\ldots,p-2]$ primitiu. Es fan públics els valors p i α.
2. A tria un valor aleatori $a = k_{privA} \in [2,\ldots,p-2]$ i calcula $k_{pubA} = \alpha^a \mod p$.
3. B tria un valor aleatori $b = k_{privB} \in [2,\ldots,p-2]$ i calcula $k_{pubB} = \alpha^b \mod p$.
4. A i B intercanvien els seus valors k_{pub}, és a dir, A envia a B el valor k_{pubA} i B envia a A el valor k_{pubB}.
5. A deriva la clau compartida $k_{AB} = k_{pubB}^a \mod p$.
6. B deriva la clau compartida $k_{AB} = k_{pubA}^b \mod p$.

Així doncs, efectivament, el valor k_{AB} derivat per les dues parts participants en el protocol és el mateix, ja que, d'una banda, l'usuari A calcula

$$k_{AB} = k_{PubB}^a \mod p = (\alpha^b)^a \mod p$$

i, d'altra banda, l'usuari B calcula

$$k_{AB} = k_{PubA}^b \mod p = (\alpha^a)^b \mod p = (\alpha^b)^a \mod p$$

L'esquema descrit fa servir un element α primitiu a $\mathbb{Z}_p^*$ on p és un primer. Aquesta descripció correspon a la implementació original de l'algorisme. Tot i això, l'algorisme pot ser generalitzat per fer servir qualsevol grup cíclic finit G d'ordre n i un element α generador a G. En aquest cas, direm que el protocol es basa en el Problema de Diffie-Hellman generalitzat.

Logaritme discret en els enters mòdul p

Al 2005 es va aconseguir calcular el logaritme discret mòdul un primer fort de 431 bits. Al 2007 es va anunciar el càlcul d'un logaritme discret mòdul un primer segur de 530 bits. Al 2014 es va aconseguir per un primer segur de 596 bits i al 2016 d'un de 768 bits.

Pel que fa a la seguretat davant d'un atacant que escolti el canal, l'atacant coneixerà els dos valors intercanviats pel canal, k_{PubA} i k_{PubB}, a més dels paràmetres públics p i α, però calcular k_{AB} a partir d'aquests valors és un procés computacionalment difícil.

Exemple 6.1 Exemple d'intercanvi de claus de Diffie-Hellman

Els usuaris A i B disposen d'un canal insegur amb el qual comunicar-se, i volen aconseguir crear una clau compartida k_{AB}:

1. Se seleccionen els valors públics $p = 508107251$ i $\alpha = 5203822$.
2. A tria el valor aleatori $a = 385641303$ i calcula:
   $k_{pubA} = \alpha^a \mod p = 5203822^{385641303} \mod 508107251 = 421539355$.
3. B tria un valor aleatori $b = 467804164$ i calcula:
   $k_{pubB} = \alpha^b \mod p = 5203822^{467804164} \mod 508107251 = 230346411$.
4. A i B intercanvien els seus valors k_{pub}.
5. A deriva la clau compartida, calculant:
   $k_{AB} = (k_{pubB})^a \mod p = 230346411^{385641303} \mod 508107251 = 45453571$.
6. B deriva la clau compartida, calculant:
   $k_{AB} = (k_{pubA})^b \mod p = 421539355^{467804164} \mod 508107251 = 45453571$.

El protocol finalitza amb A i B compartint el mateix valor secret k_{AB}.

Exemple 6.2 Exemple de MiM en l'intercanvi de claus de Diffie-Hellman

Un dels problemes del protocol d'intercanvi de claus de Diffie-Hellman és que no és segur davant d'atacants que puguin situar-se al mig de la comunicació entre els dos usuaris i puguin modificar la informació que viatja entre ells. Suposem que els dos usuaris A i B de l'exemple anterior es comuniquen per un canal insegur, on l'usuari M pot interceptar les seves comunicacions i modificar els missatges que viatgen a través del canal. De nou, A i B intenten establir una clau compartida k_{AB}.

1. Els passos 1-3 es realitzen exactament igual que a l'Exemple 6.1. Per simplicitat, farem servir els mateixos valors, de manera que al finalitzar el pas 3, A ha calculat $k_{pubA} = 421539355$ i B ha calculat $k_{pubB} = 230346411$ ($p = 508107251$ i $\alpha = 5203822$).
2. A envia k_{pubA} a través del canal que el comunica amb B. Alhora, B envia k_{pubB} a través del mateix canal.
3. M intercepta els missatges k_{pubA} i k_{pubB}, i procedeix a:
   (a) Triar un valor aleatori $ma = 361369039$ i calcular:
   $k_{pubMA} = \alpha^{ma} \mod p = 5203822^{361369039} \mod 508107251 = 176105595$.
   (b) Triar un valor aleroti $mb = 504619741$ i calcular:
   $k_{pubMB} = \alpha^{mb} \mod p = 5203822^{504619741} \mod 508107251 = 342944530$.
   (c) Enviar el valor k_{pubMA} a A i el valor k_{pubMB} a B. Noteu que, a partir d'aquest moment, A espera rebre k_{pubB} però rebrà k_{pubMA} i B espera rebre k_{pubA} però rebrà k_{pubMB}.
4. A deriva la clau compartida, calculant:
   $k'_{AB} = (k_{pubMA})^a \mod p = 176105595^{385641303} \mod 508107251 = 36322887$.
   A creu que el valor k'_{AB} és una clau compartida amb B, però en realitat correspon a una clau compartida amb M.
5. B deriva la clau compartida, calculant:
   $k''_{AB} = (k_{pubMB})^b \mod p = 342944530^{467804164} \mod 508107251 = 461525945$.
   B creu que el valor k''_{AB} és una clau compartida amb A, però en realitat correspon a una clau compartida amb M. Noteu que els valors k'_{AB} i k''_{AB} difereixen.
6. M deriva les claus compartides amb A i B, calculant:
   $k_{MA} = (k_{pubA})^{ma} \mod p = 421539355^{361369039} \mod 508107251 = 36322887$
   $k_{MB} = (k_{pubB})^{mb} \mod p = 230346411^{504619741} \mod 508107251 = 461525945$.

   A partir d'aquest moment, M comparteix una clau amb A i una amb B, i és capaç de llegir i modificar tots els missatges que s'intercanvien pel canal.
   Noteu que aquest atac és possible ja que no hi ha autenticació de les parts que participen en el protocol.

6.3 Xifres de clau pública

Habitualment els algorismes de xifrat de clau pública comprenen tres funcions bàsiques: la generació de claus, el xifrat i el desxifrat. L'algorisme de generació de claus retorna un parell de claus de criptografia asimètrica, $[k_{pub}, k_{priv}]$; l'algorisme de xifrat rep un missatge m i una clau pública k_{pub} i genera el missatge xifrat c; i l'algorisme de desxifrat rep un missatge xifrat c i una clau privada k_{priv} i permet recuperar el missatge original m.

Les funcions bàsiques d'un esquema de xifrat amb clau pública són:
$[k_{pub}, k_{priv}]$ = `generació_claus()`
c = `E(` k_{pub}, m `)`
m = `D(` c, k_{priv} `)`

6.3.1 Xifratge basat en la factorització d'enters: RSA

L'RSA és un criptosistema de clau pública basat en el problema de la factorització d'enters. Va ser el primer criptosistema de clau pública proposat: presentat el 1977, només un any més tard que el concepte de criptografia de clau pública es fes públic. RSA són les sigles formades a partir de les inicials dels cognoms dels seus creadors, Ron Rivest, Adi Shamir i Leonard Adleman. Avui en dia, l'RSA és encara un dels criptosistemes de clau pública més utilitzats, tot i que els criptosistemes basats en corbes el·líptiques cada vegada van guanyant més terreny.

L'RSA es fa servir, principalment, en dos contextos: per xifrar dades de poca mida (normalment, per xifrar claus criptogràfiques) i en signatures digitals. En l'apartat 6.5 veurem una de les construccions més utilitzades per transmetre grans quantitats de dades fent servir l'RSA combinat amb un criptosistema de clau simètrica, obtenint així els beneficis dels dos criptosistemes.

L'algorisme de generació de claus de l'RSA consta dels següents passos:

1. Es trien dos primers aleatoris p i q.
2. Es calcula $n = p \cdot q$.
3. Es calcula $\phi(n) = (p-1)(q-1)$.
4. Se selecciona un exponent públic $e \in [1, \phi(n))$ tal que $mcd(e, \phi(n)) = 1$.
5. Es calcula l'exponent privat d tal que $d \cdot e = 1 \mod \phi(n)$. És a dir, es calcula $d = e^{-1} \mod \phi(n)$.
6. La clau pública k_{pub} és el parell (n, e), mentre que la clau privada k_{priv} és el valor (d). Els valors $\phi(n)$, p i q també són valors secrets que només coneix el propietari de la clau privada.

La funció $\phi(n)$

La funció totient d'Euler $\phi(n)$ (descrita al capítol de fonaments matemàtics) compta el número d'enters positius menors a n que són coprimers amb n.

La mida d'n

Les recomanacions a data de Febrer del 2016 del NIST són de fer servir claus d'almenys 2048 bits i augmentar la mida a 3072 bits per algunes claus d'ús més crític.

Noteu que el valor d sempre existirà, ja que amb la condició $mcd(e, \phi(n)) = 1$ assegurem que e té invers a $\mathbb{Z}_n$.

Quan parlem de la longitud de la clau RSA, parlem de la mida del mòdul n (normalment expressada en bits).

Exemple 6.3 Exemple de generació de claus RSA Procedim a generar una clau RSA de 32 bits seguint els passos detallats a l'algorisme de generació de claus:

Seleccionem dos primers, per exemple, $p = 5879$ i $q = 484487$.

1. Calculem n:
   $n = pq = 5879 \cdot 484487 = 2848299073$.
   Podem comprovar com, efectivament, la clau generada és de 32 bits, ja que:
   $2^{31} < 2848299073 < 2^{32}$.
2. Calculem $\phi(n)$
   $\phi(n) = (p-1)(q-1) = (5879-1)(484487-1) = 2847808708$.
3. Seleccionem $e = 1535231195$.
   Comprovem que, efectivament:
   $mcd(e, \phi(n)) = mcd(1535231195, 2847808708) = 1$.
4. Calculem d:
   $d = e^{-1} \mod \phi(n) = 1437751395$.
   Podem comprovar que, efectivament:
   $de = 1535231195 \cdot 1437751395 = 1 \mod 2847808708$.
5. Obtenim:
   $k_{pub} = (n, e) = (2848299073, 1535231195)$
   $k_{priv} = (d) = (1437751395)$.

Exercici 6.1 Indiqueu quins dels següents parells de claus RSA, $k_{pub} = (n, e)$ i $k_{priv} = (d)$ són vàlids. Per als que no ho són, detalleu-ne el motiu.

1. $k_{pub} = (3353361769, 1647529266), k_{priv} = (1853372443)$
2. $k_{pub} = (2660610913, 700422517), k_{priv} = (339543773)$
3. $k_{pub} = (111086984740301, 1890731431), k_{priv} = (66185553158551)$

Factorització d'enters

L'empresa RSA Laboratories va esponsoritzar durant uns anys una sèrie de reptes de factorització de mòduls RSA. Dins d'aquests reptes, un mòdul de 512 bits va ser factoritzat amb èxit al 1999, un de 704 bits al 2012, i un de 729 al maig de 2016.

Per tal de xifrar un missatge amb RSA, s'aplicarà l'algorisme de xifrat, que fa servir la clau pública del destinatari:

A partir d'un missatge en clar m i la clau pública del destinatari $k_{pub} = (n, e)$, es calcula el missatge xifrat c:

$$c = m^e \mod n$$

Quan el destinatari rebi el missatge xifrat c, podrà desxifrar-lo fent servir la seva clau privada (que només ell coneix):

A partir d'un missatge en xifrat c i la clau privada del destinatari $k_{priv} = (d)$, es recupera el text en clar m:

$$m = c^d \mod n$$

Noteu que, per tal de poder desxifrar correctament un missatge, caldrà que el missatge en clar original m sigui menor que el mòdul n.

Podem veure com, efectivament, desxifrar un missatge que ha estat prèviament xifrat resulta en l'obtenció del missatge original m:

$$c^d \mod n = (m^e)^d \mod n = m^{de} \mod n = m$$

Per a realitzar l'últim pas, recordem, d'una banda, que seguint l'algorisme de generació de claus assegurem que:

$$d \cdot e = 1 \mod \phi(n)$$

D'altra banda, el teorema d'Euler estableix que si x i n són coprimers, aleshores:

$$x^{\phi(n)} = 1 \mod n$$

I, per tant:

$$x^{de} \mod n = x^{1+t\phi(n)} \mod n = x^1 \cdot x^{t\phi(n)} \mod n = x \cdot x^{\phi(n)^t} \mod n = x \cdot 1 = x \mod n$$

Exemple 6.4 Exemple de xifrat i desxifrat amb RSA

L'usuari Bob és el propietari del parell de claus RSA generats en l'Exemple 6.3. Si l'Alice vol enviar un missatge xifrat $m = 424242$ a en Bob, procedirà de la següent manera:

$$\begin{aligned} c &= m^e \mod n \\ &= 424242^{1535231195} \mod 2848299073 \\ &= 1914597261 \end{aligned}$$

En Bob, per desxifrar c i obtenir el missatge en clar original, procedirà a calcular:

$$\begin{aligned} m &= c^d \mod n \\ &= 1914597261^{1437751395} \mod 2848299073 \\ &= 424242 \end{aligned}$$

Exercici 6.2 L'Alice i en Bob són dos usuaris d'un sistema de clau pública RSA. Les seves respectives claus públiques i privades són:
$k_{pubA} = (3714176377, 1471178161), k_{privA} = (696390481)$

$k_{pubB} = (3720779831, 2037827401), k_{privB} = (2233915321)$
L'Alice vol enviar el missatge $m = 249$ xifrat a en Bob. Reproduïu el procés de xifrat realitzat per l'Alice i el procés de desxifrat que realitzarà en Bob al rebre el missatge, comprovant que efectivament el missatge rebut per en Bob coincideix amb el text en clar enviat per l'Alice.

Exercici 6.3 L'Alice i en Bob s'intercanvien missatges xifrats amb RSA fent servir la convenció de xifrar cada caràcter del missatge per separat, fent servir la codificació ASCII i utilitzant únicament lletres majúscules. Un atacant intercepta aquest missatge de l'Alice dirigit a en Bob:
$[2269693817, 1639486112, 1818812718, 2032163849, 3308958529, 251951562, 2224890518,$
$1639486112, 3489265165, 2032163849, 228316393, 1818812718]$
L'atacant coneix la clau pública d'en Bob (que l'Alice ha fet servir per xifrar el missatge), així com les convencions que fan servir l'Alice i en Bob en els intercanvis de missatges: $k_{pubB} = (3720779831, 2037827401)$
Quin és el missatge que l'Alice ha enviat a en Bob?
Nota: Trobeu el missatge sense calcular la clau privada d'en Bob, procés que no podríeu realitzar si les claus utilitzades en l'exercici fossin de mida real.

6.3.2 Xifratge basat en el logaritme discret: ElGamal

ElGamal és un criptosistema de clau pública basat en el problema del logaritme discret. En concret, ElGamal està basat en l'algorisme d'intercanvi de claus de Diffie-Hellman que s'ha presentat anteriorment a la Secció 6.2. El criptosistema deu el seu nom al seu creador, Taher ElGamal, que el va descriure el 1985.

L'algorisme de generació de claus del ElGamal consta dels següents passos:

1. Es tria un primer p i un element α d'ordre q.
2. Es tria un valor aleatori $d = k_{priv} \in [2, \ldots, p-2]$ i calcula $\beta = \alpha^d \mod p$.
3. La clau pública és $k_{Pub} = (p, \alpha, \beta)$ i la clau privada és el valor $k_{priv} = d$.

L'element α

No és necessari que α sigui un element primitiu de $\mathbb{Z}_p^*$, pot ser-ho d'un subgrup de $\mathbb{Z}_p^*$ d'ordre q.

Per tal de xifrar un missatge amb ElGamal, es procedirà a aplicar l'algorisme de xifrat.

A partir d'un missatge en clar m i la clau pública del destinatari $k_{pub} = (p, \alpha, \beta)$, es calcula el missatge xifrat c:

1. Es tria un nombre aleatori h i es calcula $c_1 = \alpha^h \mod p$.
2. Es recupera la clau pública del receptor i es calcula $c_2 = m \cdot \beta^h \mod p$.
3. S'envia el missatge xifrat (c_1, c_2).

Noteu que el xifratge amb el criptosistema ElGamal és probabilístic, ja que per a una mateixa clau pública i un mateix missatge en clar, es poden generar múltiples textos xifrats, triant diferents valors aleatoris h durant el procés de xifrat.

Fixeu-vos, també que el xifrat amb ElGamal és expansiu, ja que per un missatge de mida m es generen textos xifrats de mida $2m$.

Quan un receptor rep el parell de valors que conformen un missatge xifrat, procedirà a desxifrar-lo amb l'algorisme de desxifrat.

A partir d'un missatge xifrat (c_1, c_2) i la clau privada del destinatari $k_{priv} = d$, es recupera el text en clar m:

$$m = \frac{c_2}{c_1^d} \mod p$$

Desxifrar amb ElGamal

Per tal de calcular $\frac{c_2}{c_1^d} \mod p$, es pot calcular l'invers modular de c_1^d i multiplicar el resultat per c_2.

Exemple 6.5 Exemple de generació de claus ElGamal Un usuari vol generar un parell de claus ElGamal i procedeix a executar l'algorisme de generació de claus:

Es tria un primer $p = 3725468627$ i un element $\alpha = 150083912$.

2. Es tria un valor aleatori $d = 807878087$ i es calcula:
   $\beta = \alpha^d \mod p = 150083912^{807878087} \mod 3725468627 = 3398986020$.
3. La clau pública és $k_{pub} = (3725468627, 150083912, 3398986020)$ i la clau privada és el valor $k_{priv} = 807878087$.

Exercici 6.4 Indiqueu quins dels següents parells de claus ElGamal, $k_{pub} = (p, \alpha, \beta)$ i $k_{priv} = d$ són vàlids. Per als que no ho són, detalleu-ne el motiu.

a) $k_{Pub} = (1474315399, 79643891, 269853666), k_{priv} = 84990634$
b) $k_{Pub} = (3383730189, 2011758775, 2122190089), k_{priv} = 2878050547$
c) $k_{Pub} = (337681733, 14736556, 93610277), k_{priv} = 144823569$
d) $k_{Pub} = (980115402160228145718868281685941801 07,$
$7370649565293683745524033626267920656 8,$
$3038287610116479422097133575415434447 9),$
$k_{priv} = 614889043515727483797325027830300976 44$

Exemple 6.6 Exemple de xifrat i desxifrat amb ElGamal

L'usuari Bob és el propietari del parell de claus ElGamal generats en l'Exemple 6.5. Si l'Alice vol enviar un missatge xifrat $m = 424242$ a en Bob, procedirà de la següent manera:

1. Alice tria un nombre aleatori $h = 1052400195$ i calcula:
   $c_1 = \alpha^h \mod p = 150083912^{1052400195} \mod 3725468627 = 434020969$.
2. Alice calcula:
   $c_2 = m \cdot \beta^h \mod p = 424242 \cdot 3398986020^{1052400195} \mod 3725468627 = 2787237740$.
3. Alice envia el missatge xifrat:
   $(c_1, c_2) = (434020969, 2787237740)$.

En Bob, per desxifrar (c_1, c_2) i obtenir el missatge en clar original, procedirà a calcular:

$$
\begin{aligned}
m = \frac{c_2}{c_1^d} \mod p &= \frac{2787237740}{434020969^{807878087}} \mod 3725468627 \\
&= \frac{2787237740}{1565777894} \mod 3725468627 \\
&= 2787237740 \cdot 1602291419 \mod 3725468627 \\
&= 424242
\end{aligned}
$$

Exercici 6.5 L'Alice i en Bob són dos usuaris d'un sistema de clau pública ElGamal. Les seves respectives claus públiques i privades són:
$k_{pubA} = (3346900289, 2210916257, 849352893), k_{privA} = (713795492)$
$k_{pubB} = (3575204279, 1113291034, 792418784), k_{privB} = (2036555019)$
L'Alice vol enviar el missatge $m = 424242$ xifrat a en Bob. Reproduïu el procés de xifrat realitzat per l'Alice i el procés de desxifrat que realitzarà en Bob al rebre el missatge, comprovant que efectivament el missatge rebut per en Bob coincideix amb el text en clar enviat per l'Alice.

6.4 Signatures digitals

Més enllà d'oferir una solució al problema de la distribució de claus, la criptografia de clau pública ens permet realitzar signatures digitals.

Tradicionalment, una signatura analògica, realitzada en bolígraf sobre un paper, permet demostrar que una persona concreta l'ha generada. Així, per exemple, les signatures permeten donar validesa a contractes legals, autoritzar compres amb targetes sense pin o emetre txecs. D'una manera anàloga, les signatures digitals ens permeten demostrar que el propietari d'una determinada clau privada ha realitzat una signatura sobre un document, de manera que només el propietari és capaç de generar una signatura vàlida per aquell document i que qualsevol que conegui la clau pública associada n'és capaç de validar-la.

Generalment, els algorismes de signatures digitals comprenen tres funcions bàsiques: la generació de claus, la generació de signatures i la validació de signatures. L'algorisme de generació de claus retorna un parell de claus de criptografia asimètrica, $[k_{pub}, k_{priv}]$; l'algorisme de signatura rep un missatge m i una clau privada k_{priv} i genera una signatura digital s del missatge m; i l'algorisme de verificació rep una signatura s, un missatge m i una clau pública k_{pub} i valida la correctesa de la signatura.

Les funcions bàsiques d'un esquema de signatura digital són:
`[`k_{pub}`, `k_{priv}`] = generació_claus()`
s `= signatura(` k_{priv}`, `m `)`
v `= validació(` s`, `m`, `k_{pub} `)`

Atès que només el propietari de la clau privada és capaç de generar signatures amb aquella clau, diem que les signatures digitals ofereixen la propietat de no-repudi.

La propietat de **no-repudi** s'aconsegueix quan un usuari que realitza una acció (per exemple, signar un contracte) no pot negar posteriorment que l'acció ha estat realitzada per ell.

Així doncs, com que el propietari d'una clau privada n'és l'únic coneixedor, no podrà negar que ha signat algun document, ja que és l'únic capaç de realitzar aquella signatura.

D'altra banda, cal remarcar que per validar una signatura digital només cal conèixer la clau pública i el missatge signat, és a dir, la validació d'una signatura digital pot ser duta a terme per qualsevol part que conegui la clau pública.

Finalment, també cal destacar que les signatures digitals ofereixen integritat sobre els documents signats. En efecte, si un atacant modifica el contingut del document signat, la signatura s'invalida, i el receptor pot detectar aquesta modificació.

6.4.1 Signatures basades en la factorització d'enters: RSA

L'esquema de signatura RSA està basat en l'algorisme de xifrat RSA que s'ha descrit a la Secció 6.3.1 De la mateixa manera, la seguretat de l'algorisme de signatura RSA recau en la dificultat de factoritzar productes de dos primer grans.

A partir d'un missatge en clar m i la clau privada de l'emissor $k_{priv} = (d)$, es calcula la signatura digital del missatge s:

$$s = m^d \mod n$$

Quan el destinatari rebi el missatge m i la seva signatura s, podrà verificar la signatura fent servir la clau pública de l'emissor (que és de domini públic):

A partir d'un missatge m, la seva signatura s, i la clau pública de l'emissor $k_{pub} = (n,e)$, es valida la signatura calculant m':

$$m' = s^e \mod n$$

i validant que $m' == m$. Si $m' = m$, aleshores la signatura digital és vàlida, mentre que en cas contrari la signatura digital és invàlida.

Efectivament, si la signatura s no s'ha modificat, aleshores:

$$m' = s^e \mod n = (m^d)^e = m^{de} = m \mod n$$

Exemple 6.7 Exemple de signatura i validació amb RSA

L'usuari Bob és el propietari del parell de claus RSA que s'han fet servir en l'Exemple 6.3:
$k_{pub} = (n,e) = (2848299073, 1535231195)$
$k_{priv} = (d) = (1437751395)$.

En Bob vol enviar a l'Alice el missatge $m = 424242$ signat. Per fer-ho, procedirà de la següent manera:

$$\begin{aligned} s &= m^d \mod n \\ &= 424242^{1437751395} \mod 2848299073 \\ &= 2060449075 \end{aligned}$$

Quan el destinatari, en aquest cas l'Alice, rebi el missatge i la signatura, podrà validar la correctesa de la signatura a partir de la clau pública de Bob, calculant:

$$\begin{aligned} m' &= s^e \mod n \\ &= 2060449075^{1535231195} \mod 2848299073 \\ &= 424242 \end{aligned}$$

I comprovant que el valor m' obtingut és igual al missatge m.

6.4.2 Signatures basades en el logaritme discret: ElGamal

L'algorisme de signatura d'ElGamal va ser proposat al 1985 i es basa en la dificultat de calcular el logaritme discret.

Exercici 6.6 Calculeu el logaritme discret de 12483 en base 36848 a $\mathbb{Z}_{42841}$, és a dir, trobeu el valor x tal que $36848^x = 12483 \mod 42841$. Podríeu fer aquest mateix càlcul per a valors de 1024 bits?

A diferència de l'RSA, on els esquemes de xifrat i signatura són molt similars, l'algorisme de signatura d'ElGamal presenta diferències notables amb l'algorisme de xifratge.

A partir d'un missatge en clar m i la clau privada de l'emissor $k_{priv} = d$, es calcula la signatura digital del missatge s:

1. Es tria un valor aleatori $h \in [0, p-2]$ coprimer amb $p-1$ (és a dir, $mcd(h, p-1) = 1$).
2. Es calcula el valor $r = \alpha^h \mod p$.
3. Es troba el valor s tal que $m = dr + hs \mod p-1$. El valor s es pot trobar calculant: $s = (m - d \cdot r) \cdot h^{-1} \mod p-1$
4. La signatura correspon al parell de valors (r, s).

El càlcul del valor s	Noteu que sempre podem calcular $h^{-1} \mod p-1$ ja que al triar h hem assegurat que $mcd(h, p-1) = 1$.

Quan el destinatari rebi el missatge m i la seva signatura (r, s), podrà verificar la signatura fent servir la clau pública de l'emissor (que és de domini públic):

A partir d'un missatge m, la seva signatura s, i la clau pública del destinatari $k_{Pub} = (p, \alpha, \beta)$, es valida la signatura calculant:

$$t = \beta^r r^s \mod p$$

Es comprova si:

$$t == \alpha^m \mod p$$

Si la igualtat es compleix, la signatura és correcta. En cas contrari, la signatura és incorrecta.

Noteu com l'esquema de signatura de ElGamal, de la mateixa manera que amb l'esquema de xifratge, és probabilístic: per un mateix missatge i una mateixa clau privada, es poden generar múltiples signatures vàlides, variant el paràmetre h.

Noteu també que, a l'igual que en l'algorisme de xifrat, la mida de la signatura digital també és el doble que la del missatge.

Exemple 6.8 Exemple de signatura i validació amb ElGamal

L'usuari Bob és el propietari del parell de claus ElGamal que s'han fet servir en l'Exemple 6.5:
$k_{pub} = (p, \alpha, \beta) = (3725468627, 150083912, 3398986020)$
$k_{priv} = 807878087$.

En Bob vol enviar el missatge $m = 424242$ signat a l'Alice. Per fer-ho, procedirà de la següent manera:

1. Tria un valor aleatori $h = 249$ (comprovant que $mcd(249, 3725468627 - 1) = 1$).
2. Calcula el valor r:
   $r = \alpha^h \mod p = 150083912^{249} \mod 3725468627 = 1675101370$
3. Troba el valor s tal que $m = dr + hs \mod p - 1$.

$$\begin{aligned} s &= (m - dr) \cdot h^{-1} \mod p - 1 = \\ &= (424242 - 807878087 \cdot 1675101370) \cdot 249^{-1} \mod 3725468626 = \\ &= 1431688902 \end{aligned}$$

4. La signatura correspon al parell de valors (r, s):
   $(r, s) = (1675101370, 1431688902)$

El càlcul d's	Noteu que al càlcul del valor s es realitza mòdul $p - 1$ i no pas mòdul p.

Quan el destinatari, en aquest cas l'Alice, rebi el missatge i la signatura, podrà validar la correctesa de la signatura a partir de la clau pública de Bob, calculant:

$$\begin{aligned} t &= \beta^r r^s \mod p = \\ &= 3398986020^{1675101370} \cdot 1675101370^{1431688902} \mod 3725468627 = 1954079850 \end{aligned}$$

$$\alpha^m \mod p = 150083912^{424242} \mod 3725468627 = 1954079850$$

I comprovant com, efectivament, el resultat és igual al valor t, donant la signatura per vàlida.

Exercici 6.7 Genereu dues signatures diferents per al missatge $m = 45678$ fent servir l'esquema de signatura ElGamal i valideu, després, les signatures generades. Feu servir el parell de claus:
$k_{Pub} = (p, \alpha, \beta) = (797445667, 386331185, 505206688)$
$k_{priv} = (d) = (373845532)$

L'estàndard DSA

El DSA (per les seves sigles en anglès, *Digital Signature Algorithm*) és una variant molt popular de l'algorisme de signatura d'ElGamal que va ser proposada al 1991. Aquesta popularitat és deu, en part, a què des de 1994 és considerada un estàndard per a signatures digitals (DSS) del FIPS (de l'anglès, *Federal Information Processing Standards*), un conjunt d'estàndards públics que desenvolupa el govern federal dels Estats Units.

Els passos a seguir en l'algorisme de generació de claus DSA són els següents:

1. Es tria un primer p tal que $2^{L-1} < p < 2^L$.
2. Es busca un divisor q de $p-1$ tal que q sigui primer i $2^{N-1} < q < 2^N$.
3. Es busca un element g d'ordre q a $\mathbb{Z}_p$ ($1 < g < p$), és a dir, g és un generador del subgrup de q elements.
4. Es tria un valor aleatori $x = k_{priv}$ tal que $0 < x < q$
5. Es calcula la clau pública $y = g^x \mod p$.
6. La clau pública és $k_{pub} = (p, q, g, y)$ i la clau privada és el valor $k_{priv} = (x)$.

L'estàndard especifica quatre possibles alternatives per a l'elecció de la mida (en bits) dels valors p i q (respectivament, els valors L i N).

L	N
1024	160
2048	224
2048	256
3072	256

Taula 6.1: Valors per a L i N detallats a l'estàndard.

A partir d'un missatge en clar m i la clau privada de l'emissor $k_{priv} = x$, es calcula la signatura digital del missatge s:

1. Es genera un valor aleatori k tal que $0 < k < q$.
2. Es calcula el valor $r = (g^k \mod p) \mod q$.
3. Es troba el valor s tal que $m = ks - xr \mod q$. El valor s es pot trobar calculant: $s = k^{-1}(m + x \cdot r) \mod q$
4. La signatura correspon al parell de valors (r, s).

Si durant el procés de generació de signatura es donés el cas que s o r fossin 0, aleshores es repeteix el procés triant un nou valor k. D'aquesta manera, s'assegura que la signatura generada mai tingui un 0 en cap de les dues parts que la formen.

A partir d'un missatge m, la seva signatura (r,s), i la clau pública de l'emissor $k_{pub} = (p,q,g,y)$, es valida la signatura calculant:

1. Es comprova que $s \neq 0$ i $r \neq 0$.
2. Es calcula:

$$w = s^{-1} \mod q$$
$$u_1 = mw \mod q$$
$$u_2 = rw \mod q$$
$$v = (g^{u_1} y^{u_2} \mod p) \mod q$$

3. Es valida que $v == r \mod q$.

Si la igualtat es compleix, la signatura és correcta. En cas contrari, la signatura és incorrecta.

6.4.3 Atacs als esquemes de signatura digital

En el context de les signatures digitals, existeixen tres tipus d'atacs de falsificació:

Direm que un adversari realitza un atac de **falsificació existencial** quan aquest és capaç de crear almenys una signatura s corresponent a un missatge m.

En aquest tipus d'atacs, l'adversari no té cap control sobre el valor m, és a dir, m pot prendre qualsevol valor (el contingut del missatge no és important). L'atacant aconsegueix el seu objectiu només pel fet d'aconseguir una signatura vàlida s. Els atacs de falsificació existencial són els més senzills de realitzar.

Un atac de **falsificació selectiva** és un atac de falsificació en què l'adversari té com a objectiu crear una signatura vàlida per a un missatge m que ha triat el propi adversari amb anterioritat a l'inici de l'atac.

Així, si un atacant és capaç de dur a terme un atac de falsificació selectiva, això implica que és capaç també de dur a terme un atac de falsificació existencial.

Direm que un adversari pot dur a terme un atac de **falsificació universal** si és capaç de crear una signatura s vàlida per a qualsevol missatge donat m.

Un adversari capaç de realitzar falsificació universal pot, per tant, crear signatures vàlides per a missatges triats a l'atzar, seleccionats per ell mateix, seleccionats per una tercera part, etc.

Falsificació existencial de signatures RSA

L'algorisme de signatura RSA explicat anteriorment és susceptible a atacs de falsificació existencial de signatures.

En efecte, donada una clau pública $k_{pub} = (n,e)$, un atacant pot procedir de la següent manera:

1. L'atacant tria una signatura $s \in \mathbb{Z}_n$.
2. L'atacant calcula el missatge $m = s^e \mod n$.
3. L'atacant obté una signatura vàlida s per al missatge m.
4. La signatura és vàlida ja que $s^e = m \mod n$.

Noteu que, en aquest cas, l'atacant és capaç de construir signatures vàlides, però no té cap mena de control sobre els missatges que està signant.

Falsificació existencial de signatures ElGamal

L'algorisme de signatura d'ElGamal explicat anteriorment també és susceptible a atacs de falsificació existencial.

En efecte, donada una clau pública $k_{pub} = (p, \alpha, \beta)$, un atacant pot procedir de la següent manera:

1. Tria dos enters i i j tals que $mcd(j, p-1) = 1$.
2. Calcula la signatura:

$$r = \alpha^i \beta^j \mod p$$

$$s = -rj^{-1} \mod p-1$$

3. Calcula el missatge:

$$m = si \mod p-1$$

4. L'atacant obté una signatura vàlida (r,s) per al missatge m.
5. La signatura és vàlida ja que la igualtat $\beta^r r^s = \alpha^x$ és manté.

Vegem perquè, efectivament, la validació de la signatura és correcta:

$$\begin{aligned}
\beta^r r^s \mod p &= \alpha^{dr} r^s \mod p \\
&= \alpha^{dr} \alpha^{(i+dj)s} \mod p \\
&= \alpha^{dr} \alpha^{(i+dj)(-rj^{-1})} \mod p \\
&= \alpha^{dr-dr} \alpha^{(-rij^{-1})} \mod p \\
&= \alpha^{si} \mod p \\
&= \alpha^x \mod p
\end{aligned}$$

De la mateixa manera que amb els atacs de falsificació existencial de signatures RSA, en aquest cas l'atacat tampoc té cap control sobre els missatges signats.

Vulnerabilitat en la reutilització de valors ElGamal

L'algorisme de signatura de ElGamal fa servir un valor aleatori h a l'hora de signar els missatges. Aquest valor és el que permet que l'algorisme sigui probabilístic i que existeixin múltiples signatures vàlides per a un únic missatge i una clau determinada. L'aleatorietat en la selecció del paràmetre h és, però, crucial per a la seguretat del sistema. De fet, la seva reutilització permet a un atacant descobrir la clau privada feta servir per crear les signatures digitals.

En efecte, l'algorisme de signatura d'ElGamal (així com algunes de les seves variants) té una vulnerabilitat a través de la qual un atacant que obté dues signatures diferents, sig_1 i sig_2, realitzades amb la mateixa clau

privada d i fent servir el mateix valor h, pot recuperar la clau privada feta servir per a signar:

$$sig_1 = (r, s_1)$$
$$sig_2 = (r, s_2)$$

$$s_1 \cdot h = (m_1 - d \cdot r) \mod p-1$$
$$s_2 \cdot h = (m_2 - d \cdot r) \mod p-1$$

$$(s_2 - s_1) \cdot h = m_2 - m_1 \mod p-1$$
$$h = \frac{m_2 - m_1}{s_2 - s_1} \mod p-1$$

$$d = (m_1 - hs_1) \cdot r^{-1} \mod p-1$$

Noteu que el càlcul descrit només pot realitzar-se si $(s_2 - s_1)$ és invertible, és a dir, si $mcd(s_2 - s_1, p-1) = 1$. En cas contrari, es pot realitzar el càlcul descomposant $p-1$ i tractant els casos concrets individualment.

Equacions modulars amb elements no invertibles

Malgrat que per resoldre equacions modulars en ocasions ens aniria bé calcular inversos, també les podem resoldre en cas que no poguem calcular algun invers explícitament. Per exemple, podem tenir una equació modular del tipus $10x = 4 \mod 26$ que clarament no podem resoldre directament perquè el 10 no té invers mòdul 26, perquè $mcd(10,26) \neq 1$. Ara bé, podem calcular el $mcd(10,26) = 2$ i dividir tota l'equació, incloent el mòdul, per aquest valor. Si ho fem tindrem $5x = 2 \mod 13$. Fixeu-vos que en aquest cas, 5 sempre tindrà invers amb el nou mòdul (aquest cas 13) perquè sempre serà coprimer amb aquest valor, justament perquè el nou mòdul és el mòdul anterior al qual li hem tret el propi factor 2. Si resolem l'equació $5x = 2 \mod 13$ obtindrem $x = 3 \mod 13$. Si us hi fixeu, el valor $x = 3$ és solució de la primera equació $10x = 4 \mod 26$, però a més també tenim una altra solució, que serà $x = 3 + 13 = 16$. De fet, tindrem tantes solucions com el valor del mcd(10,26), en aquest cas, aquestes dues indicades. Ara bé, podem tenir equacions de primer grau en mòduls no primers que no tinguin solució. Per exemple, si volem resoldre l'equació $10x = 5 \mod 26$, clarament aquesta equació no té solució, perquè és equivalent a $2x = 1 \mod 26$ i això és calcular l'invers de 2 mòdul 26 que ja sabem que no existeix.

Per tant, és important que el valor h sigui únic per a cada signatura.

Aconseguir una font d'aleatorietat prou bona com per garantir que el valor h serà únic per cada una de les signatures realitzades per un dispositiu pot ser problemàtic en segons quins entorns (per exemple, en telèfons mòbils). Per aquest motiu, existeix una variant del DSA determinista, on el valor h queda determinat de manera única per la clau privada i el missatge a signar. L'algorisme que genera el valor h actua de manera similar a un generador pseudoaleatori, fent servir la clau privada i el hash del missatge com a llavors del generador. Noteu que, amb aquesta versió del DSA, amb una mateixa clau només es podrà generar una única signatura per un missatge concret. Addicionalment, és important notar que la variant determinista del DSA no modifica l'algorisme de generació de claus ni la validació de signatures, de manera que és compatible amb sistemes que implementen el DSA probabilístic.

6.5 Criptografia simètrica i asimètrica

Més enllà de les propietats que ens ofereix la criptografia de clau pública, aquesta també difereix de la criptografia simètrica en la mida de les claus i les necessitats computacionals dels seus algorismes. Pel que fa a la mida de les claus, normalment es fa servir el concepte de nivell de seguretat per avaluar la fortalesa

d'un algorisme criptogràfic amb una mida de claus concreta, i poder així comparar la seguretat oferta pels diferents algorismes:

> El **nivell de seguretat** d'un algorisme criptogràfic és el número de passos que necessita el millor atac conegut per descobrir la clau. Direm que un algorisme proporciona una seguretat d'n bits quan el millor atac necessita 2^n passos.

És important notar que el nivell de seguretat d'un algorisme pot variar amb el descobriment de nous atacs que milloren l'eficiència dels ja coneguts.

Tenint en compte la definició de nivell de seguretat, és fàcil veure que un algorisme de criptografia simètrica amb mida de clau n bits ens proporciona una seguretat d'n bits. En canvi, calcular el nivell de seguretat d'un algorisme de clau pública no és tan directe. La Taula 6.2 ens descriu els nivells de seguretat que s'assumeixen avui en dia per als algorismes de clau simètrica i asimètrica més populars.

Algorisme	Nivell de seguretat			
	80	128	192	256
AES	80	128	192	256
RSA	1024	3072	7680	15360
ElGamal	1024	3072	7680	15360
DSA	1024	3072	7680	15360

Taula 6.2: Nivell de seguretat segons la mida de la clau.

Criptografia de corbes el·líptiques

Els criptosistemes de clau pública basats en corbes el·líptiques (que queden fora de l'abast d'aquest document) permeten obtenir el mateix nivell de seguretat que els algorismes de clau simètrica amb mides de clau superiors però molt més similars. Així, per exemple, caldrà una clau ECDSA de 160 bits per aconseguir 80 bits de seguretat.

Com es pot apreciar, d'una banda com més gran és la mida de la clau utilitzada major és la seguretat que ens ofereix. D'altra banda, per tal d'obtenir un mateix nivell de seguretat en un criptosistema de clau pública que en un de clau simètrica, caldrà que la clau del primer sigui molt més gran que la del segon. Això, unit al fet que els algorismes de clau pública requereixen càlculs computacionalment intensius, fa que en general els algorismes de clau pública siguin més lents que els de clau simètrica. Aquesta lentitud pot no ser problemàtica per als ordinadors actuals, però sí que pot ser-ho en dispositius amb capacitats més limitades com ara targetes intel·ligents. A continuació, es descriuen dues de les tècniques que s'utilitzen habitualment per accelerar el procés de xifrat i desxifrat amb RSA.

Per tal d'aprofitar els avantatges de la criptografia de clau pública pel que fa a la gestió de claus i a l'hora la rapidesa de la criptografia simètrica per xifrar, sovint es combinen els dos sistemes amb la tècnica coneguda com a sobre digital.

> La tècnica del **sobre digital** consisteix a xifrar un missatge amb una clau simètrica aleatòria k i xifrar la clau simètrica k amb una clau pública.

Exercici 6.8 L'Alice i en Bob són dos usuaris d'un sistema de clau pública RSA. Les seves respectives claus públiques i privades són:
$k_{pubA} = (3714176377, 1471178161), k_{privA} = (696390481)$
$k_{pubB} = (3720779831, 2037827401), k_{privB} = (2233915321)$

L'Alice vol enviar el missatge:
$m = 0112358132134558914423337761098715972584418167 65$
xifrat a en Bob. Reproduïu el procés de xifrat realitzat per l'Alice.

A l'hora de realitzar signatures digitals, si volguéssim signar directament els missatges amb un sistema de clau pública ens trobaríem també amb la limitació de la mida de la clau, que reduiria en gran mesura el conjunt de missatges que seríem capaços de signar. En aquest cas, el que es fa es combinar les signatures digitals amb les funcions hash, descrites en el Capítol 5. És a dir, a l'hora de signar un missatge, l'usuari procedeix primer a calcular-ne un resum a través d'una funció hash, signant després aquest resum (en comptes del missatge original). Com que les funcions hash tenen una sortida de mida fixada, això ens permet assegurar que podem signar qualsevol missatge (de qualsevol mida) amb una clau d'una mida concreta (fent ús d'una funció hash amb una sortida de mida inferior a la clau).

El procediment a seguir per tal de signar un missatge m fent servir una funció hash H és:

1. Calcular el hash del missatge, $h = H(m)$.
2. Calcular la signatura del hash del missatge, s `= signatura(` k_{priv}, h `)`

El receptor del missatge m podrà validar la signatura s, procedint de la següent manera:

1. Calcular el hash del missatge, $h = H(m)$.
2. Valida la signatura s, v `= validació(` s, h, k_{pub} `)`

Noteu que en aquest cas emissor i receptor s'han de posar d'acord no només amb l'algorisme de signatura que utilitzaran sinó també amb la funció hash que faran servir.

6.6 Implementació dels algorismes de clau pública

Els algorismes de criptografia de clau pública descrits fins ara requereixen de l'ús d'operacions computacionalment costoses per funcionar. Per aquest motiu, a l'hora d'implementar aquests algorismes, es fan servir optimitzacions que permeten millorar-ne l'eficiència. En aquest capítol veurem algunes de les optimitzacions més populars que s'utilitzen a l'hora d'implementar l'RSA i l'ElGamal.

6.6.1 Optimització del xifrat RSA

L'algorisme de generació de claus RSA que hem vist a la Secció 6.3.1 tria un exponent públic e de manera aleatòria, amb les condicions que e estigui en l'interval $(1, phi(n))$ i que e sigui coprimer amb $phi(n)$. A la pràctica però, s'acostumen a triar valors d'e petits i amb pes de Hamming també petit, ja que això fa que el xifratge sigui més eficient.

Pes de Hamming

El **pes de Hamming** d'una seqüència binària és el número d'uns que conté. El pes de Hamming és equivalent a la distància de Hamming entre una seqüència donada i la seqüència de zeros de la mateixa longitud.

En concret, per xifrar (o per validar una signatura) amb RSA necessitem calcular $x^e \mod n$. Si fem servir l'algorisme d'exponenciació ràpida de multiplicar i elevar, caldran de l'ordre de $\log_2 e + pes(e)$ operacions per tal de realitzar el càlcul, amb $pes(e)$ representant el pes de Hamming de la representació binària d'e. Valors d'e petits minimitzen el terme $\log_2 e$ mentre que valors amb pes de Hamming petit minimitzen el terme $pes(e)$.

Així, alguns dels valors que es fan servir habitualment per a l'exponent públic e són 3 i 65,537 ($2^{16}+1$), que requereixen 3 i 17 operacions per xifrar, respectivament. Aquest últim és el valor per omissió que fa servir la

llibreria OpenSSL[1]. El valor 65,537 té alguns avantatges. En primer lloc és un primer de Fermat, el que fa que calguin poques multiplicacions per elevar a aquest valor i alhora simplifica la cerca dels primers p i q adequats. En segon lloc i a diferència de 3, $2^{16}+1$ és prou gran com per evitar certs atacs que es poden dur a terme amb valors d'e petits si no es fa servir *padding* de manera correcta.

Primers de Fermat

Els **primers de Fermat** són primers de la forma $F_n = 2^{(2^n)}+1$. Els únics primers de Fermats coneguts (a data de Febrer de 2016) són $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ i $F_4 = 65{,}537$.

La selecció de l'exponent públic fent servir aquestes consideracions fa que xifrar amb RSA sigui molt més ràpid que desxifrar, i també redueix el temps de comprovació de les signatures RSA. Tot i així, aquest no és l'únic factor que afecta la velocitat de les implementacions d'RSA.

Tot i que l'algorisme d'exponenciació ràpida de multiplicar i elevar permet xifrar missatges amb RSA de manera molt ràpida, aquest no es fa servir per desxifrar (ni per signar) ja que és vulnerable a atacs de canal lateral.

Els atacs de **canal lateral** (en anglès, *side channel attacks*) són atacs que es basen en informació adquirida de la implementació física d'un criptosistema. Aquests tipus d'atacs poden fer servir, per exemple, informació sobre el temps d'execució, el consum energètic, els camps electromagnètics, el so, etc.

Un atacant que analitzi el consum energètic d'un dispositiu que implementa l'algorisme de multiplicar i elevar pot obtenir directament la clau. D'una banda, per cada bit de la clau, l'algorisme de multiplicar i elevar calcula una única potència si el bit és 0 o bé una potència i una multiplicació si el bit és 1. D'altra banda, el consum energètic d'un dispositiu implementant aquest algorisme és elevat mentre s'estan realitzant aquestes operacions (tant multiplicació com exponenciació), i baix quan no s'estan fent aquestes operacions. Així, veient la traça de consum energètic del dispositiu, es pot diferenciar clarament cadascuna de les iteracions de l'algorisme (moments de consum energètic elevat separats per instants de consum energètic baix). La durada dels moments de consum energètic elevat ens permet distingir quan s'estan processant bits de la clau a 1 o a 0. D'aquesta manera, només obtenint la traça de consum energètic d'una única operació, es pot obtenir la clau.

Existeixen altres algorismes d'exponenciació ràpida que ofereixen protecció contra atacs d'anàlisi del consum energètic, com ara l'algorisme d'exponenciació de Montgomery (en anglès, *Montgomery Powering Ladder*). Aquests algorismes fan que cada iteració, independentment de si aquesta tracta un bit de la clau fixat a 0 o a 1, tingui un còmput similar, de manera que el consum energètic de cada iteració és similar.

6.6.2 Optimització del desxifrat RSA

A més de triar valors d'e que permetin accelerar el xifratge i la validació de signatures digitals, algunes de les llibreries més populars emmagatzemen tres valors intermedis durant la generació de claus RSA, amb l'objectiu de reduir el temps de desxifrat i de signatura. Aquests valors són:

- exponent 1: $d_p = d \mod (p-1)$
- exponent 2: $d_q = d \mod (q-1)$
- coeficient: $q_{inv} = (1/q) \mod p$

Aquests valors permeten optimitzar el càlcul de $c^d \mod n$ a través del Teorema Xinès del Residu. Així, per

[1] `https://www.openssl.org/docs/manmaster/apps/genpkey.html`

a calcular $m = c^d \mod n$ es procedeix a calcular:

$$\begin{aligned} m_1 &= c^{d_p} \mod p \\ m_2 &= c^{d_q} \mod q \\ h &= q_{inv}(m_1 - m_2) \mod p \\ m &= m_2 + hq \end{aligned}$$

Exemple 6.9 Exemple de desxifrat RSA

Suposem que tenim la clau privada RSA de 64 bits formada pels valors:
$d = 7506774701030841737$
$n = 10639337161500789943$
i que en el moment de generar la clau hem desat també els valors:
$p = 696734729$
$q = 15270283967$
$d_p = d \mod (p-1) = 7506774701030841737 \mod (696734729-1) = 259426577$
$d_q = d \mod (q-1) = 7506774701030841737 \mod (15270283967-1) = 8567289973$
$q_{inv} = (1/q) \mod p = 1/15270283967 \mod 696734729 = 284277123$

Aleshores, per desxifrar el missatge $c = 3510853621447083634$, procediríem de la següent manera:
$m_1 = c^{d_p} \mod p = 3510853621447083634^{259426577} \mod 696734729 = 627709010$
$m_2 = c^{d_q} \mod q = 3510853621447083634^{8567289973} \mod 15270283967 = 11944757133$
$h = q_{inv}(m_1 - m_2) \mod p = 284277123(627709010 - 11944757133) \mod 696734729 = 27$
$m = m_2 + hq = 11944757133 + 27 \cdot 15270283967 = 424242424242$

Noteu que això és equivalent a fer directament:

$$\begin{aligned} m &= c^d \mod n = \\ &= 3510853621447083634^{7506774701030841737} \mod 10639337161500789943 = \\ &= 424242424242 \end{aligned}$$

però, en canvi, totes les operacions implicades tenen exponents i mòduls molt menors que els requerits per a aquest càlcul. D'aquesta manera, s'aconsegueix reduir el temps de càlcul.

Podem veure com s'emmagatzemen aquests valors en claus RSA de mida real fent servir l'eina OpenSSL:

```
openssl genrsa -out private.pem 1024
openssl rsa -noout -text -in private.pem
```

Hem vist com s'optimitza el xifratge i la validació de signatures a partir de la tria de l'exponent públic e i com s'optimitza el desxifrat i la realització de signatures emmagatzemant uns valors auxiliars relatius a la clau privada. Després de realitzar aquestes optimitzacions, ens podríem preguntar quin dels dos processos és doncs més ràpid. Per comprovar-ho a nivell pràctic podem recórrer de nou a la llibreria Openssl. En concret, podem analitzar les diferències de temps necessaris per signar i validar signatures digitals en RSA amb la sentència:

```
openssl speed rsa
```

Els resultats de l'execució de l'anterior sentència en un Intel Core i7-4770 CPU @ 3.40GH (Taula 6.3) indiquen clarament que és molt més ràpid validar signatures (i per tant xifrar) que no pas realitzar les signatures (o desxifrar).

Mida de la clau	Temps sign.	Temps val.	Sig. per segon	Val. per segon
512 bits	0.000041s	0.000003s	24317.5	328106.1
1024 bits	0.000118s	0.000008s	8485.8	131766.6
2048 bits	0.000548s	0.000024s	1825.2	41486.7
4096 bits	0.005865s	0.000088s	170.5	11299.6

Taula 6.3: Temps per signar / validar amb RSA.

6.6.3 Optimització del xifrat ElGamal

El procés de xifrat amb ElGamal consta de tres operacions: dues exponenciacions, que permeten calcular $c_1 = \alpha^v \mod p$ i un operand de c_2, $c_2^{aux} = \beta^v$; i una multiplicació que realitza el càlcul final de c_2, $c_2 = m \cdot c_2^{aux}$.

Com en el cas de l'RSA, les exponenciacions es poden calcular amb l'algorisme d'exponenciació ràpida de multiplicar i elevar, de manera que s'agilitza el càlcul. Ambdues exponenciacions fan servir com a exponent el paràmetre aleatori v, de manera que les exponenciacions poden optimitzar-se seleccionant valors v amb propietats especials, com ara valors amb pes de Hamming petit. Si es fa servir aquesta tècnica cal anar en compte, però, de tenir un número adequat d'exponents possibles.

Ara bé, en el cas del xifrat amb ElGamal, hi ha un altre detall important a tenir en compte: les dues exponenciacions a calcular són completament independents del missatge a xifrar. Això fa que en algunes aplicacions aquests valors puguin precalcular-se amb anterioritat al procés de xifrat, en moments quan la càrrega del sistema és baixa. A l'hora de xifrar, caldrà doncs recuperar els valors precalculats i calcular únicament la multiplicació, operació que sí que depèn del missatge a xifrar.

6.6.4 Optimització del desxifrat ElGamal

El procés de desxifrar amb el criptosistema ElGamal consta també de tres operacions: una exponenciació, que permet calcular c_1^d; una inversió, que calcula $(c_1^d)^{-1}$; i finalment una multiplicació, que recupera m calculant $c_2 \cdot (c_1^d)^{-1}$. El desxifrat es pot optimitzar unint les dues primeres operacions en una sola exponenciació, fent ús del Petit Teorema de Fermat (que és un cas concret del Teorema d'Euler). El Petit Teorema de Fermat afirma que, donat un p primer:

$$x^{p-1} = 1 \mod p, \forall x \text{ tal que } mcd(x,p) = 1$$

Aprofitant aquesta igualtat, podem reduir el càlcul de $(c_1^d)^{-1}$ a una única exponenciació: c_1^{p-d-1}, és a dir, el valor c_1 elevat a l'exponent $p-d-1$. Comprovem que realment les dues alternatives són equivalents:

$$(c_1^d)^{-1} \mod p = (c_1^d)^{-1} \cdot c_1^{p-1} \mod p = c_1^{p-d-1} \mod p$$

D'aquesta manera, desxifrar un missatge amb ElGamal se simplifica i passa a consistir en una exponenciació i una multiplicació.

6.7 Criptografia post-quàntica

Com hem vist, els algorismes de criptografia de clau pública més populars avui en dia es basen en la dificultat de resoldre tres problemes matemàtics: la factorització d'enters, el logaritme discret i el logaritme discret sobre corbes el·líptiques. Aquest problemes, però, deixarien de ser difícils si disposéssim d'un ordinador quàntic de prou capacitat.

L'algorisme de Shor és un algorisme quàntic que permet resoldre'ls en un temps polinomial respecte a la mida de l'entrada. L'algorisme de Shor va ser proposat per Peter Shor l'any 1994 a l'article *Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer*.

Hi ha tot un conjunt de famílies d'algorismes de criptografia de clau pública que es basen en altres problemes matemàtics, que es creuen difícils de resoldre tant en ordinadors clàssics com en ordinadors quàntics. A tots ells se'ls engloba sota el nom de criptografia post-quàntica. Exemples d'aquestes famílies en són la criptografia basada en hashos, en codis, en reticles o en equacions quadràtiques multivariades. Així, per exemple, el criptosistema de McEliece (desenvolupat per Robert McEliece el 1978) està basat en la dificultat de descodificar un codi lineal i l'esquema de signatura de Merkle (ideat per Ralph Merkle el 1979) es basa en la generació d'un arbre de hashos.

Atès que els algorismes de criptografia post-quàntica són segurs davant d'ordinadors quàntics, hom podria preguntar-se el motiu per el qual el seu ús no es troba molt més estès actualment que el dels algorismes que hem descrit en aquest mòdul, que no són segurs en aquesta situació. D'una banda, l'eficiència computacional dels algorismes de criptografia asimètrica post-quàntics és baixa, molt pitjor que la que ens ofereixen actualment l'RSA o ElGamal. D'altra banda, alguns d'aquests esquemes són molt nous, i la comunitat criptogràfica encara no hi ha depositat prou confiança. Per tal de generar aquesta confiança, és necessari que els criptoanalistes dediquin molt temps a analitzar-los. Finalment, els algorismes criptogràfics sovint necessiten d'un conjunt de protocols que n'estandarditzin el seu ús en diferents circumstàncies. Com veurem més endavant, aquest fet pot arribar a ser crític per la seguretat dels esquemes. La criptografia post-quàntica encara no ha arribat a la maduresa en aquest sentit.

6.8 Resum

En aquest capítol hem après el concepte de criptografia de clau pública, concepte que engloba tot un conjunt d'algorismes criptogràfics que fan servir parells de claus: una clau pública coneguda per tothom i una clau privada només coneguda pel seu propietari. En els esquemes de xifrat amb clau pública, els usuaris poden xifrar missatges per a un destinatari utilitzant la clau pública d'aquest destinatari. Alhora, només el destinatari del missatge, que coneix la clau privada, serà capaç de desxifrar els missatges dirigits a ell. Oposadament, els esquemes de signatura digital permetran a l'emissor d'un missatge signar-lo amb la seva clau privada (que només ell coneix), permetent que aquesta signatura sigui validada per qualsevol que en conegui la clau pública.

També s'ha explicat l'intercanvi de claus de Diffie-Hellman, un protocol que permet a dues parts establir un secret comú per mitjà d'un canal insegur. Així mateix, ens hem centrat a descriure els dos criptosistemes de clau pública més utilitzats avui en dia, l'RSA i ElGamal.

La tècnica del sobre digital ens permet disposar dels avantatges de la criptografia de clau pública sense trobar-nos amb les limitacions de mida i de capacitat computacional d'aquesta, combinant criptografia de clau pública amb algorismes de criptografia simètrica.

6.9 Solucions dels exercicis

Exercici 6.1:

La clau a no és vàlida ja que $e \cdot d \mod \phi(n) \neq 1$:

$$1647529266 \cdot 1853372443 \mod \phi(3353361769) =$$
$$= 1647529266 \cdot 1853372443 \mod 3353239120 =$$
$$= 1499866678 \neq 1$$

La clau c no és vàlida ja que el mòdul no és producte de dos primers:
$n = 111086984740301 = 45613 \cdot 41141 \cdot 59197$

Exercici 6.2:

Per tal de xifrar el missatge, l'Alice farà servir la clau pública d'en Bob i procedirà a calcular: $c = m^e \mod n = 249^{2037827401} \mod 3720779831 = 1920900242$.

Quan en Bob rebi el missatge xifrat c, procedirà a desxifrar-lo amb la seva clau privada, calculant: $m = c^d \mod n = 1920900242^{2233915321} \mod 3720779831 = 249$

Exercici 6.3:

L'atacant pot aprofitar el fet que coneix tots els possibles missatges que els usuaris s'intercanvien juntament amb el fet que l'RSA no és una xifra probabilística per generar tots els possibles textos xifrats i comparar el resultat amb el missatge intercanviat. Així, l'atacant procediria a calcular:

Lletra	m	c
A	65	$65^{2037827401} \mod 3720779831 = 3489265165$
B	66	$66^{2037827401} \mod 3720779831 = 3192216487$
C	67	$67^{2037827401} \mod 3720779831 = 2269693817$
D	68	$68^{2037827401} \mod 3720779831 = 3031724104$
E	68	$69^{2037827401} \mod 3720779831 = 1496836939$
...		
G	71	$71^{2037827401} \mod 3720779831 = 2224890518$
H	72	$72^{2037827401} \mod 3720779831 = 228316393$
O	79	$79^{2037827401} \mod 3720779831 = 251951562$
P	80	$80^{2037827401} \mod 3720779831 = 2032163849$
R	82	$82^{2037827401} \mod 3720779831 = 1639486112$
T	84	$84^{2037827401} \mod 3720779831 = 3308958529$
Y	89	$89^{2037827401} \mod 3720779831 = 1818812718$

Taula 6.4: Càlculs realitzats per l'atacant.

Descobrint que el missatge xifrat correspon a la cadena:

$$[67, 82, 89, 80, 84, 79, 71, 82, 65, 80, 72, 89]$$

que alhora codifica el missatge CRYPTOGRAPHY.

Exercici 6.4:

Les claus a i d són vàlides;
La clau b no és vàlida ja que $p = 3383730189$ no és primer.
La clau c no és vàlida ja que $\beta \neq alpha^d \mod p$:

$$14736556^{144823569} \mod 337681733 = 93610276 \neq 93610277$$

Exercici 6.5:

Per tal de xifrar el missatge, l'Alice farà servir la clau pública d'en Bob i procedirà a seleccionar un valor aleatori v, per exemple, $v = 8341864$ i calcular:
$c_1 = \alpha^v \mod p = 1113291034^{8341864} \mod 3575204279 = 3323366879$.
$c_2 = m \cdot \beta^v \mod p = 424242 \cdot 792418784^{8341864} \mod 3575204279 = 3166979642$.
El text xifrat és el parell $(c_1, c_2) = (3323366879, 3166979642)$.

Quan en Bob rebi el missatge xifrat (c_1, c_2), procedirà a desxifrar-lo amb la seva clau privada, calculant:
$m = \frac{c_2}{c_1^d} \mod p = \frac{3166979642}{3323366879^{2036555019}} \mod 3575204279 = 3166979642 \cdot 663237018 = 424242$

Noteu que la solució de l'exercici no és única, ja que depèn de la selecció del paràmetre aleatori v.

Exercici 6.6:

Podem calcular el logaritme discret proposat per força bruta, és a dir, calculant $36848^x \mod 42841$ per a tots els valors possibles d'x (de 0 a 42840), fins a trobar el resultat que busquem, 12483. Així, trobarem que $36848^{4928} \mod 42841 = 12483$. No podríem seguir aquest mateix enfocament per a valors de 1024 bits, ja que el número de possibilitats a provar és massa gran.

Exercici 6.7:

Seleccionem un valor aleatori h, per exemple, $h = 55$. Calculem:
$r = \alpha^h \mod p = 386331185^{55} \mod 797445667 = 673983968$
$s = (m - d \cdot r) \cdot h^{-1} \mod p - 1 = (45678 - 373845532 \cdot 673983968) \cdot 55^{-1} \mod 797445666 = 1042804$
La signatura correspondria al parell $(r, s) = (673983968, 1042804)$.

Per a realitzar una segona signatura, seleccionaríem un segon valor aleatori h, per exemple, $h = 77$:
$r = \alpha^h \mod p = 386331185^{77} \mod 797445667 = 205790131$
$s = (m - d \cdot r) \cdot h^{-1} \mod p - 1 = (45678 - 373845532 \cdot 205790131) \cdot 77^{-1} \mod 797445666 = 284046946$
$(r, s) = (205790131, 284046946)$.

Per tal de validar les signatures, procedim a calcular:
$t = \beta^r r^s \mod p = 505206688^{673983968} \cdot 673983968^{1042804} \mod 797445667 = 137624270$
i comprovem que el valor sigui igual a $\alpha^m \mod p$:
$\alpha^m \mod p = 386331185^{45678} \mod 797445667 = 137624270$

Per a la segona signatura, realitzem el mateix procediment:
$t = \beta^r r^s \mod p = 505206688^{205790131} \cdot 205790131^{284046946} \mod 797445667 = 137624270$
i comprovem que el valor sigui igual a $\alpha^m \mod p$:

$$\alpha^m \mod p = 386331185^{45678} \mod 797445667 = 137624270$$

Noteu que la solució de l'exercici no és única, ja que depèn de les eleccions del paràmetre aleatori h.

Exercici 6.8:

El missatge m és major que el mòdul de la clau pública d'en Bob $n = 3720779831$. Per aquest motiu, el missatge no es pot xifrar directament amb RSA. Una alternativa es fer servir la tècnica del sobre digital: l'Alice genera una clau simètrica k aleatòria i xifra el missatge amb la clau k, $c = E_k(m)$, fent servir com a algorisme de xifrat E qualsevol esquema de clau simètrica. L'Alice xifra després la clau k amb la clau pública d'en Bob fent servir RSA, $c_k = E_{K_{pub}}(k)$. Finalment, l'Alice envia en Bob els dos valors, c i c_k.

6.10 Bibliografia

Bernstein, Daniel J. (2009). *Introduction to post-quantum cryptography*. Springer Berlin Heidelberg, 1-14.

Diffie, Whitfield, and Martin Hellman. (1976). *New directions in cryptography*. IEEE transactions on Information Theory, 22.6: 644-654.

ElGamal, Taher (1985). *A public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms.*. IEEE transactions on information theory 31.4: 469-472.

Menezes, Alfred J., Paul C. Van Oorschot, and Scott A. Vanstone. (1996). *Handbook of applied cryptography*. CRC press.

NIST (2013). *FIPS PUB 186-4 Digital Signature Standard (DSS)*. National Institute of Standards and Technology. `http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/FIPS/NIST.FIPS.186-4.pdf`

Paar, Christof, and Jan Pelzl. (2009). *Understanding cryptography: a textbook for students and practitioners*. Springer Science & Business Media.

Pornin, T. (2013). *RFC6979: Deterministic Usage of the Digital Signature Algorithm (DSA) and Elliptic Curve Digital Signature Algorithm (ECDSA)*.
`https://tools.ietf.org/html/rfc6979`

Rescorla, E. (1999). *Diffie-Hellman Key Agreement Method*.
`https://tools.ietf.org/html/rfc2631`

Rivest, Ronald L., Shamir, Adi, and Adleman, Leonard. (1978). *A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems*. Communications of the ACM 21.2: 120-126.